Муниципальное автономное общеобразовательное

 учреждение «Гимназия №1»

г. Стерлитамак Республики Башкортостан

Исследовательская работа

Тема: **Диофантовы уравнения**

**Выполнил:** Юркин Никита

Ученик 11Д класса

**Руководитель:** Валеева Снежана Анатольевна

Учитель математики

г. Стерлитамак, 2022

Оглавление

[Введение 2](#_Toc121611787)

[Из истории про Диофанта 3](#_Toc121611788)

[Что такое диофантовы уравнения 6](#_Toc121611789)

[Задачи на числа 7](#_Toc121611790)

[Методы решения линейных диофантовых уравнений. 8](#_Toc121611791)

[Методы решения нелинейных диофантовых уравнений. 14](#_Toc121611792)

[Решение текстовых задач 17](#_Toc121611793)

[Решение экономических задач 19](#_Toc121611794)

[Заключение 24](#_Toc121611795)

[Использованная литература 25](#_Toc121611796)

# ****Введение****

Я проделал данную работу для изучения особого вида уравнений, а именно диофантовых уравнений. Диофантово уравнение – это уравнение с несколькими неизвестными, решение которого ищется в целых, иногда натуральных, числах. Сегодня я уделю внимание решению уравнений, которые необходимо решить при составлении математической модели в текстовых задачах, также в экономических задачах на оптимизацию, в задачах с параметрами и в задачах на числа и их свойства

Задачи по этой теме предлагаются как на олимпиадах, так и в заданиях ЕГЭ.

Безусловно, тема решений уравнений в целых числах была, есть и будет актуальна. Диофантовы уравнения (задачи на целые числа) всегда считались одними из наиболее сложных задач, предлагаемых учащимся старших классов. Это объясняется отсутствием единого метода их решения. Недаром ей занимались с самого зарождения математики. Конкретные задачи такого ряда были решены ещё в Древнем Вавилоне около 4 тыс. лет назад. Древнегреческий мыслитель Диофант, который жил около 2 тыс. лет назад в своей книге «Арифметика» решил большое число задач в целых числах и описал общие методы.

**Объект исследования** - диофантовы уравнения.

**Предмет исследования -** методы решения уравнений в целых числах.

**Актуальность**: Актуальность данной темы обусловлена тем, что умение решать уравнения в целых числах оказывается полезным при решении задач, выходящих за рамки школьной программы.

**Цель работы**: изучение диофантовых уравнений, их типов и способов решения.

**Задачи:**

1. Научиться быстро и грамотно находить информацию в интернете и научной литературе по данной теме, развить навыки проектной деятельности.
2. Изучить биографию Диофанта и ознакомиться с понятием «диофантовы уравнения».
3. Научиться решать уравнения в целых числах разных уровней сложности.
4. Систематизировать задачи по способам их решений.
5. Разобрать основные методы решения диофантовых уравнений.

# Из истории про Диофанта

Диофант представляет одну из наиболее трудных загадок в истории науки. Нам не известны ни время, когда он жил, ни предшественники его, которые работали бы в той же области. Труды его подобны сверкающему огню среди полной непроницаемой тьмы.

Промежуток времени, когда мог жить Диофант, составляет полтысячелетия! Нижняя грань этого промежутка определяется без труда: в своей книге о многоугольных числах Диофант неоднократно упоминает математика Гипсикла Александрийского, который жил в середине II века до н. э. С другой стороны, в комментариях Теона Александрийского к «Альмагесту» знаменитого астронома Птолемея помещён отрывок из сочинения Диофанта. Теон жил в середине IV века н. э. Этим определяется верхняя грань этого промежутка. Итак, 500 лет!

Французский историк науки Поль Таннери, издатель наиболее полного текста Диофанта, попытался су́зить этот промежуток. В библиотеке Эскуриала он нашёл отрывки из письма Михаила Пселла, византийского учёного XI века, где говорится, что «учёнейший Анатолий, после того как собрал наиболее существенные части этой науки (речь идёт о введении степеней неизвестного и об их обозначениях), посвятил их своему другу Диофанту». Анатолий Александрийский действительно составил «Введение в арифметику», отрывки из которой приводят в дошедших до нас сочинениях Ямблих и Евсевий. Но Анатолий жил в Александрии в середине III века н. э. и даже более точно — до 270 года, когда он стал епископом Лаодакийским. Значит, его дружба с Диофантом, которого все называют Александрийским, должна была иметь место до этого. Итак, если знаменитый александрийский математик и друг Анатолия по имени Диофант составляют одно лицо, то время жизни Диофанта — середина III века н. э.

Сама же «Арифметика» Диофанта посвящена «достопочтенному Дионисию», который, как видно из текста «Введения», интересовался арифметикой и её преподаванием. Хотя имя Дионисий было в то время довольно распространённым, Таннери предположил, что «достопочтенного» Дионисия следует искать среди известных людей эпохи, занимавших видные посты. И вот оказалось, что в 247 году епископом Александрии стал некий Дионисий, который с 231 года руководил христианской гимназией города! Поэтому Таннери отождествил этого Дионисия с тем, которому посвятил свой труд Диофант, и пришёл к выводу, что Диофант жил в середине III века н. э. Мы можем, за неимением лучшего, принять эту дату.

Зато место жительства Диофанта хорошо известно — это знаменитая Александрия, центр научной мысли эллинистического мира.

После распада огромной империи Александра Македонского Египет в конце IV века до н. э. достался его полководцу Птолемею Лагу, который перенёс столицу в новый город — Александрию. Вскоре этот многоязыкий торговый город сделался одним из прекраснейших городов древности. Размерами его превзошёл впоследствии Рим, но долгое время ему не было равного. И вот именно этот город стал на многие века научным и культурным центром древнего мира. Это было связано с тем, что Птолемей Лаг основал Музейон, храм Муз, нечто вроде первой Академии наук, куда приглашались наиболее крупные учёные, причём им назначалось содержание, так что основным делом их были размышления и беседы с учениками. При Музейоне была построена знаменитая библиотека, которая в лучшие свои дни насчитывала более 700 000 рукописей. Неудивительно, что учёные и жаждущие знаний юноши со всего мира устремились в Александрию, чтобы послушать знаменитых философов, поучиться астрономии и математике, иметь возможность в прохладных залах библиотеки углубиться в изучение уникальных рукописей.

Музейон пережил династию Птолемеев. В первые века до н.э. он пришёл во временный упадок, связанный с общим упадком дома Птолемеев в связи с римскими завоеваниями (Александрия была окончательно завоевана в 31 году до н. э.), но затем в первые века н. э. он снова возродился, поддерживаемый уже римскими императорами. Александрия продолжала оставаться научным центром мира. Рим никогда не был в этом отношении её соперником: римской науки (мы имеем в виду естественные науки) просто не существовало, и римляне оставались верными заветам Вергилия, писавшего:

Тоньше другие ковать будут жизнью дышащую бронзу, —

Верю тому, — создадут из мрамора лики живые,

Красноречивее будут в судах, движения неба

Тростью начертят своей и вычислят звёзд восхожденья,

Ты же, римлянин, знай, как надо народами править 2).

И если в III–II веках до н. э. Музейон блистал именами Евклида, Аполлония, Эратосфена, Гиппарха, то в I–III веках н. э. здесь работали такие учёные как Герон, Птолемей и Диофант.

Чтобы исчерпать всё известное о личности Диофанта, приведём дошедшее до нас стихотворение-загадку:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей — и камень

Мудрым искусством его скажет усопшего век.

Волей богов шестую часть жизни он прожил ребёнком

И половину шестой встретил с пушком на щеках.

Только минула седьмая, с подругою он обручился.

С нею пять лет проведя сына дождался мудрец;

Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.

Отнят он был у отца ранней могилой своей.

Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,

Тут и увидел предел жизни печальной своей 3).

Отсюда нетрудно подсчитать, что Диофант прожил 84 года. Однако для этого вовсе не нужно владеть искусством Диофанта! Достаточно уметь решать уравнение 1-й степени с одним неизвестным, а это умели делать египетские писцы ещё за 2 тысячи лет до н. э.

Но наиболее загадочным представляется творчество Диофанта. До нас дошло шесть книг из 13, которые были объединены в «Арифметику». Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, его «Данным», леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, которые остались нам совершенно не известны. Мы можем только гадать о её корнях и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика» Диофанта — это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением (или несколькими способами решения) и необходимыми пояснениями. Поэтому с первого взгляда кажется, что она не является теоретическим произведением. Однако при внимательном чтении видно, что задачи тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определённых, строго продуманных методов. Как это было принято в древности, методы не формулируются в общем виде, а повторяются для решения однотипных задач.

# Что такое диофантовы уравнения

**Диофантовыми уравнениями** называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами).

**Диофантовыми уравнениями** называются уравнения вида

P(x1, x2, ..., xn) = 0,

где P(x1, ..., xn) - многочлен с целыми коэффициентами.

Проблема решения уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений первой степени и для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными достаточно трудной является даже задача существования целочисленных решений. Например, не известно, имеет ли уравнение

$x^{3}$ +$ y^{3}$ + $z ^{3}$= 30

хотя бы одно целочисленное решение. Более того, доказано, что в принципе не существует единого алгоритма, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диофантовы уравнения.

Уравнение $x^{2}$ + $y^{2}$ = $z^{2}$, связывающее стороны x, y, z прямоугольного треугольника, всегда вызывало большой интерес. Натуральные числа x, y и z, являющиеся решениями этого уравнения, называются **«пифагоровыми тройками».**

# Задачи на числа

Этот параграф посвящён задачам с целочисленными неизвестными (только такие задачи и будут рассматриваться). Ключевой идеей решения задач с целочисленными неизвестными является идея делимости одних чисел на другие, а необходимым элементом решения — логический перебор. Идея делимости и логический перебор часто используются в последнем задании ЕГЭ по математике, обычно предполагающем ответы на два или три вопроса. И если последний из этих вопросов является довольно сложным, то ответы на первый и — во многих случаях — на второй вопросы могут оказаться по силам любому успевающему выпускнику, что подтверждает высокий ежегодный процент тех, кто получает за это задание хотя бы один балл. Данные примеры помогут познакомиться на примерах с тем, как «работает» идея делимости и как делается логический перебор, чтобы впоследствии применить сходные рассуждения при самостоятельном решении подобных задач. Начнём с нескольких относительно простых примеров (ещё раз напомним, что здесь и далее все переменные принимают только целочисленные значения). Сначала проиллюстрируем, как «работает» логический перебор.

Пример 1. Найдите все пары (x; y) целых чисел x и y, для которых $(x +2y)^{2}$ + $+ (2x +3y - 1)^{2}$ =9.

Решение. Левая часть равенства представляет собой сумму двух неотрицательных целых чисел. Равенство может быть выполнено, только если это числа 0 и 9, или 1 и 8, или 2 и 7, или 3 и 6, или 4 и 5. Кроме того, каждое слагаемое левой части является квадратом целого числа. Поэтому из 4 вариантов остаётся только один:

0 и 9. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $(x+2y)^{2}$ =0, $(2x+3y-1)^{2}$ = 9. Из первого уравнения находим x =−2y. Тогда второе уравнение принимает вид $\left(-y-1\right)^{2}$ =9, или $( y+1)^{2}$ =9, откуда y=2 (и тогда x=−4) или y=−4 (и тогда x=8).

Случай 2:, $(x + 2y)^{2}$ = 9, $(2x + 3y - 1)^{2}$ = 0. Из второго уравнени$ $я находим x = 1−3y 2 . Тогда первое уравнение принимает вид ($\frac{1-3y}{2} – 2y)^{2}$ = 9, или $( y + 1)^{2}$ = 36, откуда y = 5 (и тогда x = −7) или y =−7 (и тогда x =11).

Ответ: (−4; 2); (8; −4); (−7; 5); (11; −7).

Теперь рассмотрим методы, которые помогают решать более сложные задачи.

## Методы решения линейных диофантовых уравнений.

Рассмотрим некоторые методы, которые помогают при решении олимпиадных задач и последнего задания в ЕГЭ по профильной математике.

***Использование неравенств***

Пример 2. Решить в натуральных числах уравнение 5x + 8y = 39.

Решение. Для уменьшения перебора вариантов рассмотрим неравенства



Проведем перебор по неизвестной у. Если y = 1, то x = 6,2 не является натуральным числом.

Если y = 2, то x = 4,6 не является натуральным числом.

Если y = 3, то x = 3.

Если y = 4, то x = 1,4 не является натуральным числом.

Ответ: (3; 3).

***Метод остатков***

Пример 3. Решить в целых числах 3x – 4y = 1.

Решение. Перепишем уравнение в виде 3x = 4y +1. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая. 1.

Если y = 3m, где m∈ Z, то 4y +1 = 12m +1 не делится на 3. 2.

Если y = 3m +1, то 4y +1= = 4(3m +1) +1 = 12m + 5 не делится на 3. 3.

Если y = 3m + 2, то 4y +1= = 4(3m + 2) +1 = 12m + 9 делится на 3, поэтому

3x = 12m + 9, x = 4m + 3.

Ответ: x = 4m + 3, y = 3m + 2, где m∈ Z

***Метод спуска***

Пример 4. Решить в целых числах уравнение 5x – 7y = 3.

Решение. Выразим из уравнения то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю: 

Дробь $\frac{2y+3}{5}$ должна быть равна целому числу. Положим $\frac{2y+3}{5}$ = z, где z – целое число. Тогда 2y + 3 = 5z. Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент при котором меньше по модулю, и проделаем аналогичные преобразования:

Дробь $\frac{z+3}{2}$ должна быть целым числом. Обозначим , $\frac{z+3}{2}$ = t, где t – целое число. Отсюда z = 2t − 3. Последовательно возвращаемся к неизвестным х и у: y = 3(2t − 3) − t = 5t − 9, x = y + z = 5t − 9 + 2t − 3 = 7t −12.

 Ответ: x = 7t −12, y = 5t − 9, где t ∈ Z.

***Метод последовательного уменьшения коэффициентов по модулю***

Пример 5. Решить уравнение в целых числах 79y – 23x = 1.

Решение. Проведем деление с остатком 79 = 23\*3 +10 и перепишем исходное уравнение в виде 23x = 79y −1= 69y +10y −1, 23x − 69y =10y −1. Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому и правая часть должна делиться на 23. Имеем 10y −1= 23t, где t ∈ Z. Для полученного нового уравнения повторим процедуру уменьшения коэффициентов. 10y = 23t +1= (2\*10 + 3)t +1;

10y − 20t = 3t +1; 3t +1=10u, где u ∈ Z.

Проведем еще раз процедуру уменьшения коэффициентов. 3t +1=10u = =(3\*3+1)u;

3t − 9u = u −1; u −1= 3n, n ∈ Z. Выразим х и у через n.

Так как u = 3n +1, то 3t =10u −1=10(3n +1) −1= 30n + 9;

t =10n + 3. 10y = 23t +1= 23(10n + 3) +1= 230n + 70;

 y = 23n + 7. 23x = 79y −1= 79(23n + 7) −1= 79\* 23n + 552;

 x = 79n + 24.

Ответ: x = 79n + 24; y = 23n + 7, где n ∈ Z.

Замечание. В последних двух примерах применен метод последовательного уменьшения коэффициентов по модулю, при этом уравнения приводились к разному виду.

***Использование формул***







Пример 6. (МГУ, 1969). Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

Решение. Из условия задачи следует, что существует натуральное число k такое, что n = 6k + 4. Аналогично имеем n =15l + 7, где l ∈ N. Исключая из этих двух равенств n, получим уравнение 2k − 5l =1. (\*) Для решения этого уравнения найдем какое-нибудь частное решение в целых (не обязательно неотрицательных) числах. Подбором в качестве такого частного решения можно взять, например, k = −2, l = −1. Согласно следствия уравнение (\*) имеет решения k = −2 + 5t, l = −1+ 2t, где t ∈ Z. Чтобы числа k и l были неотрицательными, параметр t должен принимать натуральные значения. Теперь имеем n = 6(5t − 2) + 4 = 30t − 8 = 30(t −1) + 22.

Ответ: 22.

***Использование отношения делимости***

Пример 7. Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько было контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят 3 тонны? Указать все решения.

Решение. Обозначим количество контейнеров первого вида через х, второго – через у. Получаем уравнение 130x +160y = 3000 или 13x +16y = 300. Далее имеем 13x +13y + 3y = 13\*23 +1, 3y −1 = 13(23 − x − y). Отсюда следует, что разность

3y −1 делится на 13.

Если 3y −1 = 0, то у не является натуральным числом.

Если 3y −1 = 13, то у не является натуральным числом.

Если 3y −1 = 26, то y = 9 и x = 12.

Если 3y −1 = 39, то у не является натуральным числом.

Если 3y −1 = 52, то у не является натуральным числом.

Если 3y −1 = 65, то y = 22, но 16 ⋅ 22 = 352 > 300.

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг.

***Выделение целой части***

Пример 8. У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них 39 ног.

Решение. Пусть х – количество осьминогов, у – количество морских звезд, тогда получаем уравнение 8x + 5y = 39 . Выразим у из уравнения и выделим целую часть:



Отсюда следует, что разность 3x − 4 делится на 5.

Если 3x − 4 = 0, то х не является натуральным числом.

Если 3x − 4 = 5, то x = 3 и y = 3.

Если 3x − 4 = 10, то х не является натуральным числом.

Если 3x − 4 = 15, то х не является натуральным числом.

Если 3x − 4 = 20, то x = 8, но 8⋅8 = 64 > 39.

Ответ: 3 и 3.

***Использование конечных цепных дробей***

Цепная дробь (или непрерывная дробь) – это математическое выражение вида



где $a\_{0}$ a есть целое число и все остальные $a\_{n}$ a натуральные числа (то есть неотрицательные целые). Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. Для рациональных чисел может быть использован алгоритм Евклида для быстрого получения разложения в цепную дробь.

Пример 9. Решить в целых числах уравнение 127x − 52y + 1= 0.

Решение. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$;



Правильную дробь $\frac{23}{52}$ заменим равной ей дробью $\frac{1}{\frac{52}{23}}$.

Тогда получим : Проделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$:

Теперь исходная дробь примет вид:



Повторяя те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$ , получим



Выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5}$, придем к окончательному результату:



Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби – одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:



Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда 127 ⋅ 9 − 52 ⋅ 22 + 1 = 0 . Из сопоставления полученного равенства с уравнением 127x − 52y + 1= 0 следует, что x = 9 , y = 22 будет решением этого уравнения, и согласно теореме все его решения будут содержаться в формулах x = 9 + 52t , y = 22 +127t , где t ∈ Z.

Ответ: x = 9 + 52t , y = 22 +127t , где t ∈ Z.

## Методы решения нелинейных диофантовых уравнений.

***Применение формул сокращенного умножения***

Пример 10. Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

Решение. Запишем условие задачи в виде уравнения 55 $n^{2}$− $k^{2}$= или (n − k)(n + k) = 55. Так как n + k > 0 , то n − k > 0 , причем n + k > n − k . Поскольку 55 = 1⋅ 55 = 5⋅11, то возможны два случая



Решая эти уравнения, получим два ответа: n = 28, k = 27 и n = 8, k = 3.

Ответ: (28;27); (8;3).

***Способ группировки***

Пример11. Решить в целых числах уравнение xy + 3x − y = 6 .

Решение. Запишем уравнение в виде x( y + 3) − (y + 3) = 3 или (x −1)(y + 3) = 3.

 Так как 3 = 3\*1= −1\*(−3) = −3\*(−1), то рассмотрим четыре системы



Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (4;− 2); (−2;− 4); (2;0); (0;− 6).

***Разложение квадратного трехчлена на множители***

Пример 12. Решить в целых числах уравнение $x^{2}$−3xy +2$ y ^{2}$ =11 .

Решение. Решим уравнение $x^{2}$−3xy +2$ y ^{2}$ =11. относительно неизвестной x :$ x \_{1}$ = y и $x\_{2}$= 2y Тогда получаем (x − y)(x − 2y) =11. Так как 11 = 1\*11 =11\*1= −1\*(−11) = −11\*(−1), то рассмотрим четыре системы уравнений:



Из каждой системы получаем решения.

Ответ: (21;10); (−9;−10); (−21;−10); (9;10).

***Использование дискриминанта (полный квадрат)***

Пример 13. Решить в целых числах уравнение $x^{2}-xy+y^{2}=x+y$.

Решение. Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно х:

$x^{2}-\left(y+1\right)x+y^{2}-y=0$. Его дискриминант  должен быть квадратом некоторого целого числа t. Получаем новое уравнение

 Из последнего уравнения следует, что



1. Если $t^{2}=0$, то уравнение $3(y-1)^{2}=4$ не имеет целого решения у.
2. Если $t^{2}=1$, то уравнение $3(y-1)^{2}=3$ имеет целые решения $y\_{1}=2$

и $y\_{2 }=0$. При y = 2 получаем квадратное уравнение $x^{2}-3x+2=0$. с корнями x =1 или x = 2 . При y = 0 получаем квадратное уравнение $x^{2}-x=0$ с корнями x = 0 или x =1.

1. Если $t^{2}=4$ , то уравнение $3(y-1)^{2}=0$ имеет одно целое решение y =1. При y =1 получаем квадратное уравнение $x^{2}-2x=0$ с корнями x = 0 или x = 2 .

Ответ: (1;2); (2;2); (0;0); (1;0), (0;1); (2;1)

***Параметризация уравнения***

Пример 14. Решить в целых числах уравнение $x ^{3}$+ $y^{3}$+ $z^{3}$ = 2.

Решение. Положим x = a + b, y = a − b. Так как  то исходное уравнение принимает вид 

Положив a =1, получим  Отсюда   

Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра t.

Ответ:  где t ∈ Z

***Метод оценки***

Пример 15. Решить в натуральных числах уравнение 

Решение. Пусть для определенности x ≤ y. Проведем перебор для первых значений неизвестной х.

 1. Если x = 1, то получаем неверное равенство  так как

 при любых натуральных у.

1. Если x = 2, то получаем неверное равенство  так как  при любых натуральных у.
2. Если x = 3, то получаем 
3. Если x = 4, то получаем 
4. Если x = 5, то получаем 

Пусть x ≥ 6. По условию y ≥ x, следовательно, y ≥ 6. Тогда  а значит,  Таким образом, при x ≥ 6 и y ≥ x исходное уравнение решений не имеет. Заметим, что в уравнении  неизвестные х и у равноправны, поэтому снимая условие y ≥ x , имеем еще одно решение (6;3). Кроме того, можно сделать вывод, что при x ≥ 6 и y ≥ 6 исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: (4;4); (6;3); (3;6).

# Решение текстовых задач

Задача 1. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причем в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A?

Решение:

Тип А: 2 автобуса; *n* − рейсов каждый; m + 7 − человек в автобусе

Тип В: 3 автобуса; *n* − 1 − рейс; *m* − человек



Следовательно надо найти делители 42: 

Если $n-3=1 $ то получаем $n=4, m=56$ а всего школьников 504.

Если $n=5, m=35$ то школьников 420;

Если $n=6, m=28$ то школьников 420;

Если $n=9, m=21$ то школьников 504;

Если $n=10, m=20$то школьников 540;

Если $n=17, m=17$ то школьников 816;

Если $n=45, m=15$ то школьников 1980.

Ответ: 1980.

Задача 2. Танкер может заполняться через две трубы, причём его заполнение через первую трубу происходит на 5 часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени заполнения танкера через первую трубу его заполнение через обе трубы одновременно занимает не менее 6 часов?

Указание. Если t ч – время заполнения танкера через первую трубу, то искомое время задается дробью .

Решение. Если t ч – время заполнения танкера первой трубой, а его объем равен единичному, то  – производительности первой и второй труб соответственно. Тогда время совместного заполнения танкера выражается дробью (неравенство составлено сразу из требования условия):



По смыслу задачи t > 5, поэтому







О т в е т. [15; +∞).

# Решение экономических задач

Задачи на оптимизацию — это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач заключается в том, что не всегда есть готовые методы решения, и задача может потребовать своего подхода. Успех в решении таких задач заключается в систематическом тренинге.

• Подробный разбор условия задачи для четкого понимания сути описанного в задаче процесса;

• Выбор переменных, количество которых должно быть достаточным для то, чтобы составить уравнения и неравенства. Если переменных оказалось больше, чем число уравнений, но при этом все было сделано верно, то “лишние” переменные взаимно уничтожатся или сократятся. Иногда в процессе решения требуется найти не сами переменные по отдельности, а их комбинацию;

• Формализация или составление уравнений и неравенств. При этом важно обращать внимание на единицы измерения - они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;

• Решение полученного уравнения, неравенства или системы;

• Интерпретация полученного результата и непосредственно сам ответ на вопрос задачи.

Задача 1. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. При этом один за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условия ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Для формализации условия подобных задач введем следующие обозначения и выражения.

 r - продолжительность рабочего дня;

n - количество рабочих, занятых по добыче конкретного металла;

p - масса металла, добываемого одним рабочим в час (производительность);

r\*n - человеко-часы;

r\*n\*p - масса металла, добываемого на шахте в день.

На основе данных задачи составим таблицу:



Таким образом, требуется распределить рабочих в каждой шахте так, чтобы произвести наибольшее количество сплава. Вводим переменные: для первой шахты x - количество рабочих, которые добывают Al, тогда (60 - х) - количество рабочих, добывающих Ni. Для второй шахты: y - количество рабочих, которые добывают Al, тогда (260 – y) - количество 8 рабочих, добывающих Ni. Дополненная таблица имеет вид:



Так как для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то масса алюминия в сплаве в 2 раза больше массы никеля, то есть:

10 х + 15 у = 2 \* (3500 - 15 х - 10 у),

40 х + 35 у = 7000.

Откуда: х = 175 – 7/8 у (1.1) или у = 200 – 8/7 х.

Учтем ограничения на переменные:



В системе (1) произошло сужение исходных (заданных в условии задачи) ограничений на переменную у, что позволило определить максимальное значение у. В системе (2) такого сужения исходных ограничений на переменную х не произошло.

Составим функцию f (x, y), которая задает значения массы сплава. Для этого заметим, что масса сплава (на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля) в 3 раза больше массы никеля, следовательно: f (x, y) = 3\*(3500 – 15x – 10y).

Подставим (1.1) вместо х: f (y) = 3\*(875 + 25/8 y).

Подставляем $ y \_{\begin{array}{c}max\\\end{array}}$= 200: f (200) = 4500.

*Комментарий*. Отношение масс металлов в сплаве позволяет составить уравнение, которое впоследствии разрешается относительно одной из переменных. Какую именно переменную выражать через другую, определяем из факта суждения исходных ограничений на переменную, который следует из решения систем ограничений. Так, в вышеописанной задаче для функции f (x, y) переменная ч была заменена на выражение от у. При составлении функции f (x, y) снова используется информация из условия задачи об отношениях масс в сплаве, но теперь уже значение f (x, y) считается как количество всех частей в этом отношении.

Задача 2. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется х2 человеко-часов труда, а для добычи у кг никеля в день требуется у2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение:

На основе данных задачи составим таблицу:



Так как алюминий и никель взаимозаменяемы и в первой области в час добывается больше алюминия, то логичным будет направить всех рабочих первой области на добычу алюминия. Теперь надо оптимально распределить рабочих во второй области. Пусть х – количество рабочих, которые добывают алюминий, тогда (90 – х) – количество рабочих, добывающих никель. Вид зависимости между человеко-часами и массой добываемого в день металла имеет вид $(r\*n) ^{2}$= r\*n\*p или rn=$\sqrt{r\*n\*p }$. Исходя из этого, дополним таблицу:





Составим функцию f(x):

f( x )=135+$\sqrt{5 x}$ +$\sqrt{5\*(90-x )}$

Для нахождения ее наибольшего значения найдем нули производной:

$$f^{,}\left(x\right)=\frac{5}{2}\*\frac{5\*\sqrt{5\*\left(90-x \right)}-\sqrt{5 x}}{\sqrt{5 x(450-x)}}$$

Откуда х = 45.

$$f^{,}\left(46\right)= \frac{5}{2}\*\frac{\sqrt{220}-\sqrt{230}}{\sqrt{50600}}<0$$

$$f^{,}\left(44\right)= \frac{5}{2}\*\frac{\sqrt{230}-\sqrt{220}}{\sqrt{50600}}>0$$

Следовательно, х = 45 – точка максимума, а значит f (45) = 165 – наибольшее значение функции. Таким образом, завод при указанных условиях может производить максимум 165 кг.

Сформулируем алгоритмы решения рассмотренных выше задач. Примечание. Переменные вводятся для количества рабочих, добывающих тот или иной металл. Анализ условия:

• Производительность задана для двух объектов (область, шахта).

• В условии задано отношение масс металлов в сплаве.

1. Вводятся две переменные.

2. Находится масса каждого металла, добываемого в день для каждого объекта.

3. Суммируются массы каждого металла, добытого в день на двух объектах.

 4. Составляется уравнение, связывающее переменные, с учетом отношения масс металлов в сплаве.

5. Составляется функция массы сплава (функция двух переменных), в которой учитывается суммарное количество частей, входящих в сплав металлов.

6. Исследуются ограничения на переменные: в функции сплава остается та переменная, для которой произошло сужение области ее значений. Определяется ее максимальное значение и вычисляется наибольшее значение функции массы сплава.

# Заключение

Решение уравнений в целых числах – один из самых красивых и интересных разделов математики, именно поэтому изучение данной темы показалось мне по-настоящему полезным и не скучным.

Целью моей работы являлось изучение диофантовых уравнений, их типов и способов решения. Использовав материалы по данной теме, я выполнила все поставленные передо мной задачи:

1. Расширил свои математические навыки и получил представление о работе над исследовательским проектом.
2. Изучил биографию Диофанта и ознакомилась с понятием «диофантовы уравнения».
3. Научился решать уравнения в целых числах разных уровней сложности.
4. Рассмотрел различного рода задачи, которые сводятся к решению диофантовых уравнений.

# Использованная литература

* Н. Д. Золотарёва [и др.] Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие; под ред. М. В. Федотова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
* Шестаков С. А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. —М.: МЦНМО, 2020.
* Шестаков С. А. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019.
* Вольфсон Г. И. и др. ЕГЭ 2020. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020.
* А.А. Прокофьев Математика. ЕГЭ. Задачи на целые числа (типовое задание 19). / А.А. Прокофьев, А.Г. Корянов – издание 2-е, перераб. – Ростов-н/Д: Легион, 2018.
* <http://ega-math.narod.ru/Liv/Diophant.htm>
* <https://math-ege.sdamgia.ru/>
* <https://math100.ru/>