Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение

города Москвы "Школа № 2005"

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Автор:

Зобнин Артем Романович

Ученик 9 класса «А»,

ГБОУ Школа № 2005

Руководитель:

Соколова Наталья Борисовна

Учитель математики,

ГБОУ Школа № 2005

Москва, 2023

Оглавление

[Введение 2](#_Toc130241770)

[Цели 3](#_Toc130241771)

[Задачи 3](#_Toc130241772)

[Методика выполнения работы по исследованию изменения коэффициентов 3](#_Toc130241773)

[Выводы из первой части исследования 4](#_Toc130241774)

[Методика выполнения работы по исследованию «каскада» парабол 5](#_Toc130241775)

[Выводы из второй части исследования «каскада» парабол 6](#_Toc130241776)

# Введение

Когда в школе мы изучали параболы, я заинтересовался тем, как будет меняться график квадратичной функции при изменении каждого из коэффициентов A,B и C. Для того, чтобы каждый раз не строить функции карандашом на бумаге, я решил написать программу на Python и посмотреть, на поведение параболы.

Написав программу, я случайно нарисовал прямую, которая пересекала мою параболу. Мне стало интересно, какая получится парабола, если ее корнями будут координаты точек пересечения прямой и моей параболы. И я решил провести исследование, в результате которого у меня получились красивые картинки с закономерностями. Эти закономерности заставляют задуматься и продолжить исследования.

Поэтому я решил оформить в виде проекта мои исследования и назвал его: «Исследование свойств квадратичной функции».

# Цели

1. Определить, как меняется график квадратичной функции в зависимости от изменения каждого коэффициента. Найти закономерности.
2. Исследовать графики парабол (каскад), получающихся путем определения их корней. Корнями являются точки пересечения прямой и предыдущей параболы.

# Задачи

1. Для цели: «Определить, как меняется график квадратичной функции в зависимости от изменения каждого коэффициента. Найти закономерности.»
	1. Написать алгоритм на Python и разработать интерфейс приложения, иллюстрирующего изменение графика квадратичной функции в зависимости от изменения каждого коэффициента.
	2. Определить закономерности изменения координат вершины параболы при изменении каждого коэффициента.
	3. Проиллюстрировать закономерности.
	4. Сделать выводы.
2. Для цели: «Исследовать графики парабол (каскад), получающихся путем определения их корней. Корнями являются точки пересечения прямой и предыдущей параболы.»
	1. Написать алгоритм на Python и разработать интерфейс приложения, иллюстрирующего «Каскад из парабол»
	2. Определить закономерности изменения координат вершин каждой следующей параболы.
	3. Проиллюстрировать закономерности.
	4. Сделать выводы.

# Методика выполнения работы по исследованию изменения коэффициентов

На языке программирования Python я написал алгоритм демонстрирующий график квадратичной функции.

Коэффициенты А,В и С задаются путем установки бегунков на выбранных значениях:

1. Из первой шкалы выбирается коэффициент А, в моем случае из диапазона от -0,3 до 0,3 т.к. это более наглядно. Если коэффициент А брать с большими по модулю значениями, тогда парабола будет слишком узкая.
2. Из второй шкалы выбирается коэффициент В, в моем случае из диапазона от -7 до 7 т.к. это более наглядно.
3. Из третьей шкалы выбирается коэффициент С, в моем случае из диапазона от -300 до 300.

# Выводы из первой части исследования

**Изменяя постепенно коэффициент А, можно сделать выводы, что у параболы:**

1. Меняется «Развал» - чем меньше значение, тем шире расположены ветви. И при А=0 парабола превращается в прямую y=bx+c. А чем больше значения коэффициента А, тем ближе друг к другу располагаются ветви.
2. Меняется координата вершины. Я заметил, что вершина «бегает» по прямой. Я решил вывести уравнение этой прямой:

- координата вершины $x=-\frac{b}{2a}+c$

- выразим $a=-\frac{b}{2x}$

- подставим $a$ в уравнение параболы $y=ax^{2}+bx+c$

- получим $y=\frac{bx}{2}+c$

Построив график этой прямой одновременно с параболой, я убедился, что действительно при изменении коэффициента А парабола $y=ax^{2}+bx+c$ «бегает» по прямой $y=\frac{bx}{2}+c$

 

**Изменяя постепенно коэффициент В, можно сделать выводы, что у параболы:**

Меняется координата вершины. Я заметил, что вершина «бегает» по другой параболе. Я решил вывести уравнение этой параболы:

- координата вершины основной параболы $x=-\frac{b}{2a}+c$

- выразим $b=-2ax$

- подставим $a$ в уравнение параболы $y=ax^{2}+bx+c$

- получим $y=-ax^{2}+c$

Построив график этой параболы одновременно с основной параболой, я убедился, что действительно при изменении коэффициента В парабола $y=ax^{2}+bx+c$ «бегает» по параболе $y=-ax^{2}+c$



**Изменяя постепенно коэффициент С, можно сделать выводы, что у параболы:**

Меняется координата вершины – перемещается вниз/вверх.

# Методика выполнения работы по исследованию «каскада» парабол

* + - 1. На языке программирования Python я написал алгоритм демонстрирующий

- график квадратичной функции $y=ax^{2}+bx+c$

- пересекающую его прямую $y=kx+m$.

Каждый коэффициент А, В и С также, как в первой части берется из соответствующей шкалы.

Коэффициенты прямой K и M задаются непосредственно в программе.

* + - 1. У построенных параболы и прямой получились две точки пересечения.

Зная уравнения параболы и прямой, я нашел координаты этих точек, решив систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}y=ax^{2}+bx+c\\y=kx+m\end{array}\right.$$

приравняв правые части

$ax^{2}+bx+c$ = $kx+m$

$$ax^{2}+\left(b-k\right)x+\left(c-m\right)=0$$

Пусть координаты точек пересечения параболы и прямой по Х обозначены Х1 и Х2.

1. Я представил, что получившееся при решении системы уравнение задает новую параболу $y=ax^{2}+\left(b-k\right)x+\left(c-m\right)$, с корнями Х1 и Х2 и построил ее график.

Далее я заметил, что моя прямая $y=kx+m$ также пересекает эту новую параболу

$y=ax^{2}+\left(b-k\right)x+\left(c-m\right)$, и решил снова найти координаты точек пересечения.

Еще раз решая систему уравнений, мы получаем еще одни корни, через которые проходит следующая парабола.

Повторив процедуру описанную в первый раз, я получил уравнение:

$$ax^{2}+\left(b-2k\right)x+\left(c-2m\right)=0$$

и построил график этой функции

 $y=ax^{2}+\left(b-2k\right)x+\left(c-2m\right)$.

1. Повторяя это много раз, мы получим целый каскад парабол, с общим уравнением:

$y=ax^{2}+\left(b-nk\right)x+\left(c-nm\right)$, где n – номер параболы.

Я написал алгоритм на языке программирования Python, который строит графики:

- исходной параболы $y=ax^{2}+bx+c$ - фиолетовая

- пересекающую его прямую $y=kx+m$ – синяя

- каскад парабол $y=ax^{2}+\left(b-nk\right)x+\left(c-nm\right)$ – белые.

# Выводы из второй части исследования «каскада» парабол

После реализации построения параболы, пересекающей ее прямой и «каскада» парабол, на экране получилась довольно-таки красивая картина:



Если приглядеться, то можно заметить, что вершины этих парабол «каскада» лежат как бы на параболе.

Я решил исследовать это и вывести уравнение этой параболы.

Координаты вершины:

$$x\_{в}=-\frac{(b-nk)}{2a}$$

 $y\_{в}=ax\_{в}^{2}+\left(b-nk\right)x\_{в}+\left(c-nm\right)$

В этих уравнениях координаты вершины имеют общее $n$, если его выразить из $x\_{в}$ и поставить в $y\_{в}$, тогда получится уравнение зависимости Y от Х. Это и будет новая парабола, проходящая через все вершины парабол каскада $y=-ax^{2}+c$

Я не ожидал, что она будет похожа на самую первую (у них одинаковые коэффициенты A), только ветви направлены в противоположную сторону.

У этой параболы $y=-ax^{2}+c $ (нарисована желтым цветом) есть еще интересное свойство – ее вершина совпадает с точкой пересечения всех парабол каскада, а также по Х ее вершина совпадает с корнем уравнения прямой $y=kx+m$ корень $X=-\frac{m}{k}$.

Эта интересная зависимость – положение прямой, пересекающей первую параболу, задает свойства всего каскада.

